НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 9

## 5.2 Алгебраический способ определения автоколебаний

В данной лекции продолжается нумерация формул лекции 8.

Мы выполнили гармоническую линеаризацию нелинейного звена, а теперь применим ее для исследования работы нелинейной системы. Рассмотрим определение симметричных автоколебаний алгебраическим способом на основе гармонической линеаризации нелинейности. Пусть система на рисунке 5.1 имеет передаточную функцию линейной части в виде

$$W\text{л}(s) = \frac{y}{u} = \frac{R(s)}{Q(s)}\ , \tag{5.17}$$

где *R(s), Q(s)* – полиномы от переменной преобразования Лапласа *s*.

Считаем, что эта передаточная функция обладает свойствами фильтра низких частот.

Запишем уравнения линейной части и нелинейного звена с учетом того, что задание равно нулю

$$\begin{aligned} &Q(s)y = R(s)u \\ &u = f(\varepsilon) = f(-y) \end{aligned}\ . \tag{5.18}$$

Здесь $f(\varepsilon)$ – характеристика нелинейного элемента. Из (5.18) имеем уравнение замкнутой системы

$$Q(s)y - R(s)f(-y) = 0\ . \tag{5.19}$$

Имеем уравнение гармонически линеаризованного нелинейного звена (5.14) в области изображений по Лапласу

$$f(-y) = -(q(a) + \frac{q'(a)}{\omega}s)y\,. \tag{5.20}$$

Подставляя (5.20) в (5.19), получаем

$$(Q(s) + R(s)(q(a) + \frac{q'(a)}{\omega}s))y = 0\ . \tag{5.21}$$

Уравнение (5.21) – это уравнение замкнутой системы регулирования с гармонически линеаризованным нелинейным звеном. Для конкретного периодического решения, когда $a$ = const, это линейное уравнение. Но для другого решения коэффициенты меняются, то есть для каждого решения свои коэффициенты, зависящие от амплитуды колебаний. Нам нужно найти его решения в виде гармонических колебаний, то есть нужно найти решения (5.21) вида (см. (5.1))

$$y = a\sin\omega t\ . \tag{5.22}$$

Иными словами, нужно найти $a$ и $\omega$ в (5.22), удовлетворяющие (5.21).

Решение линейного уравнения (5.21) зависит от корней его характеристического уравнения. Это алгебраическое уравнение имеет вид

$$Q(\lambda) + R(\lambda)(q(a) + \frac{q'(a)}{\omega}\lambda) = 0 \ , \qquad (5.23)$$

где λ – корни уравнения (5.23), которые нужно найти. В общем случае корни λ могут быть действительными, комплексно-сопряженными и мнимыми. Периодическому решению (5.22) соответствует пара чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ уравнения (5.23). Подставляя в (5.23) λ = jω, получаем

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q(a) + jq'(a)) = 0 \ . \qquad (5.24)$$

Выделяем в (5.24) действительную и мнимую части, получим

$$M(a,\omega) + jN(a,\omega) = 0 \ . \qquad (5.25)$$

Для выполнения (5.25) нужно, чтобы были равны нулю раздельно действительная и мнимая части, то есть

$$M(a,\omega) = 0; N(a,\omega) = 0 \ . \qquad (5.26)$$

Из уравнений (5.26) определяются амплитуда а и частота ω периодического решения (5.22), если оно существует.

Решение задачи упрощается в случае симметричной однозначной нелинейности, так как для нее $q'$=0.

Тогда вместо (5.23) имеем

$$Q(\lambda) + R(\lambda)q(a) = 0 \ , \qquad (5.27)$$

Поскольку в (5.27) нет слагаемого с $q'$, то его решение упрощается. Подставим, как и прежде, $\lambda = j\omega$

$$Q(j\omega) + R(j\omega)q(a) = 0 \ , \qquad (5.28)$$

затем выделим вещественные и мнимые части многочленов R(s), Q(s) в виде

$$Q(j\omega) = M_Q(\omega) + jN_Q(\omega); R(j\omega) = M_R(\omega) + jN_R(\omega) \ . \qquad (5.29)$$

Тогда вместо (5.26) получаем

$$M_Q(\omega) + M_R(\omega)q(a) = 0; N_Q(\omega) + N_R(\omega)q(a) = 0 \ . \qquad (5.30)$$

Эти два уравнения преобразуются в виде

$$\left.\begin{aligned} q(a) = -\frac{M_Q(\omega)}{M_R(\omega)} \ , \\ M_Q(\omega)N_R(\omega) - N_Q(\omega)M_R(\omega) = 0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (5.31)$$

Как видно, во второе уравнение входит только частота автоколебаний. То есть частота автоколебаний (периодического решения) зависит только от параметров линейной части и не зависит от формы однозначной нелинейности. Поэтому решение задачи здесь следующее: из второго уравнения (5.31) находим частоту, затем из первого уравнения определяем амплитуду колебаний "$a$".

Таким образом, порядок определения параметров автоколебаний алгебраическим методом гармонической линеаризации следующий:

1) определяются два коэффициента гармонической линеаризации;

2) составляется характеристическое уравнение замкнутой системы регулирования;

3) выводится система из двух уравнений, соответствующих чисто мнимым корням характеристического уравнения;

4) решением системы находятся частота и амплитуда колебаний.

Определив параметры автоколебаний, нужно исследовать устойчивость этих колебаний, но методами определения устойчивости мы займемся позже.

Преимущество алгебраического метода – получение решения в общем виде. Недостаток – трудность решения системы уравнений для систем выше третьего порядка.

## 5.3 Частотный способ определения автоколебаний

Трудностью применения алгебраического метода определения параметров автоколебаний, как об этом уже говорилось, является трудность решения системы уравнений для систем выше третьего порядка.

Для линейных систем известны пути преодоления такого рода трудностей – применение критериев устойчивости. Аналогичные приемы используется и в методе гармонической линеаризации, ведь у нас при фиксированной частоте колебаний система линейная! Один из способов – применение критерия Найквиста.

Известно, что система устойчивая, когда годограф АФХ разомкнутой системы на комплексной плоскости не охватывает точку с координатами (0; – 1). А что будет, если АФХ проходит через эту точку? В этом случае в системе возникают незатухающие колебания. Нам как раз и нужно выявить их параметры.

Таким образом, если АФХ разомкнутой системы на комплексной плоскости проходит через точку с координатами (0; – 1), то в системе возникают незатухающие колебания.

Выведем условия существования таких колебаний по критерию Найквиста.

Передаточная функция разомкнутой системы на рисунке 5.1 имеет вид

$$W_p(s) = W_л(s)\cdot W_н(a) = \frac{R(s)}{Q(s)}(q(a) + \frac{q'(a)}{\omega}s) \; . \tag{5.32}$$

Подставляя в (5.32) $s = j\omega$, получаем АФХ разомкнутой системы

$$W_p(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)}(q(a) + jq'(a)) \; . \tag{5.33}$$

АФХ проходит через точку (0; – 1)при

$$W_л(j\omega)\cdot W_н(a) = -1 \; , \tag{5.34}$$

или

$$W_л(j\omega) = -\frac{1}{W_н(a)} = -\frac{1}{q(a) + jq'(a)} \; . \tag{5.35}$$

Уравнение (5.35) определяет искомые амплитуду a и частоту ω периодического решения. Для систем с линейной частью невысокого порядка задачу по-прежнему можно решить аналитически, для такого решения удобно использовать уравнение (5.34).

Для этого, как и ранее (см. (5.26)), в (5.34) выделить действительную $M(a,\omega)$ и мнимую $N(a,\omega)$ части, приравнять их к нулю

$$M(a,\omega)=0; N(a,\omega)=0 \tag{5.36}$$

и решить полученные уравнения относительно $a$ и $\omega$.

Для систем высокого порядка задача решается графически, здесь удобно использовать соотношение (5.35). Для графического решения на комплексной плоскости вычерчивается АФХ линейной части системы, а также обратная АФХ нелинейного элемента с обратным знаком. Точка (или точки) их пересечения согласно (5.35) определяет $a$ и $\omega$, причем $a$ отчитывается по кривой обратной характеристики, а $\omega$ – по кривой линейной части.

Для решения задачи можно использовать логарифмические частотные характеристики.

Итак, порядок применения частотного способа:

1) на комплексной плоскости строятся АФХ линейной части системы и обратной АФХ нелинейного звена с обратным знаком;

2) находят точку (или точки) пересечения этих АФХ, эти точки характеризуются одинаковыми значениями амплитуд и фаз;

3) по координатам точки (точек) пересечения находят амплитуду $a$ и частоту $\omega$ периодического решения, причем $a$ отчитывается по кривой обратной характеристики, а $\omega$ – по кривой линейной части. Если АФХ линейной части системы и обратной АФХ нелинейного звена с обратным знаком заданы таблично, в таблицах этих АФХ ищут строки с одинаковыми амплитудами и фазами и фиксируют амплитуду $a$ и частоту $\omega$ в этих строках, эти значения и будут решениями.

На рисунке 5.3 показан пример построений. Здесь $B$ – точка пересечения, для этой точки амплитуды и фазы обоих АФХ одинаковые.

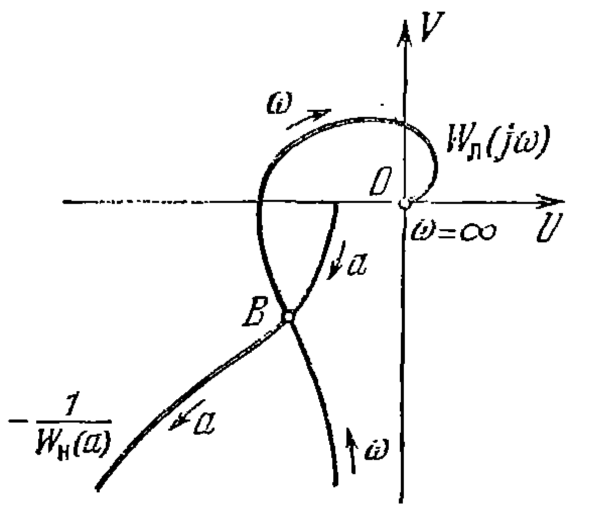


Рисунок 5.3 – Определение параметров периодического решения частотным методом

Как и при алгебраическом методе, решение упрощается в случае однозначной нелинейности, когда $q^1 = 0$. В этом случае АФХ нелинейной части изменяется вдоль действительной оси.

### 5.4 Исследование устойчивости автоколебаний

Определив тем или иным способом периодическое решение, надо исследовать его устойчивость. Если оно устойчиво, то это означает, что автоколебательный процесс физически существует. Неустойчивому периодическому решению соответствует отсутствие автоколебаний. Полностью проблема устойчивости решений, полученных методом гармонической линеаризации, не решена. Л.С. Гольдфарб, используя критерий Найквиста, получил критерий устойчивости для достаточно широкого круга решений. Он заключается в следующем.

Как уже отмечалось, периодическое решение в системе будет тогда, кода выполняется условие (5.34). Рассмотрим, что должно быть, если амплитуда колебаний $a$ изменится. Дадим этой амплитуде отклонение $\Delta a$. Система будет возвращаться к периодическому режиму, если при $\Delta a>0$ колебания затухают, а при $\Delta a<0$ – расходятся. Следовательно, при $\Delta a>0$ АФХ разомкнутой системы $W_p(s)$ должна деформироваться так, чтобы, согласно критерию устойчивости Найквиста система была устойчивой, а при $\Delta a<0$ – неустойчивой. Это значит, что для устойчивости системы при $\Delta a>0$ АФХ разомкнутой системы $W_p(s)$ должна не охватывать точку с координатами

(-1,0), при $\Delta a<0$ – охватывать.

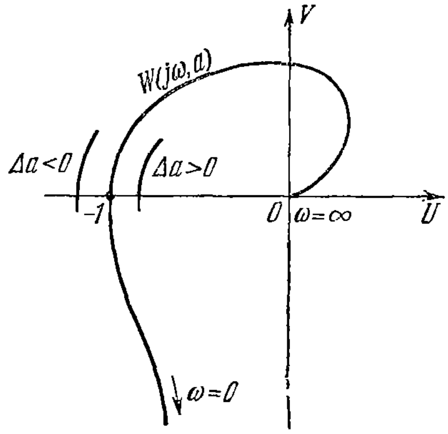


Рисунок 5.4 – Деформация АФХ разомкнутой системы при изменении $a$ на $\Delta a$

На рисунке 5.4 показано, что исходная АФХ разомкнутой системы проходит через точку (0; – 1), что соответствует автоколебаниям замкнутой системы. При $\Delta a>0$ АФХ не охватывает эту точку (проходит правее точки), что соответствует устойчивой системе. При $\Delta a<0$ АФХ охватывает указанную точку, и система неустойчивая (проходит левее точки). Таким образом, требуется, чтобы при $\Delta a>0$ было

$$\left|W_л( j\omega)\right| < \left|-\frac{1}{W_н( a+\Delta a )}\right| . \qquad (5.37)$$

Отсюда следует, что на рисунке 5.3 положительный отчет амплитуды $a$ вдоль кривой $-\frac{1}{W_н(a)}$ должен быть направлен изнутри вовне через кривую $W_л( j\omega)$ ( на рисунке 5.3 показано стрелкой). В противном случае периодическое решение неустойчиво.

Если линейная часть устойчива или нейтрально устойчива, характеристика нелинейного звена однозначная и есть аналитическое выражение для $q( a )$, то условие устойчивости, реализующее рассмотренную выше идею, можно записать в виде

$$\left.\frac{dq( a )}{da}\right|_{a=a_i} < 0 \qquad (5.38)$$

где $a_i$ – $i$-е решение уравнения (5.36).